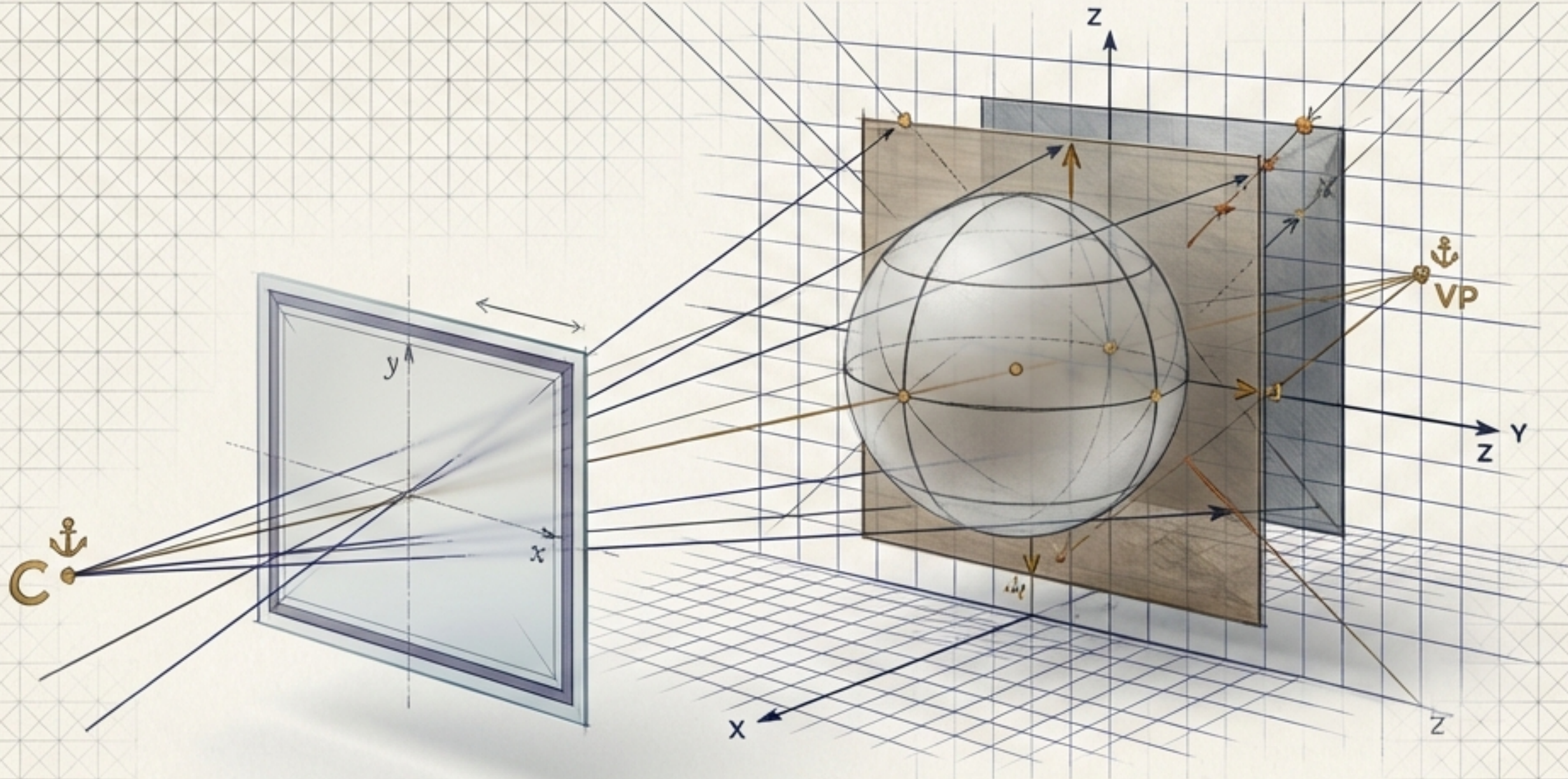


3D Projektif Uzayın İnşası

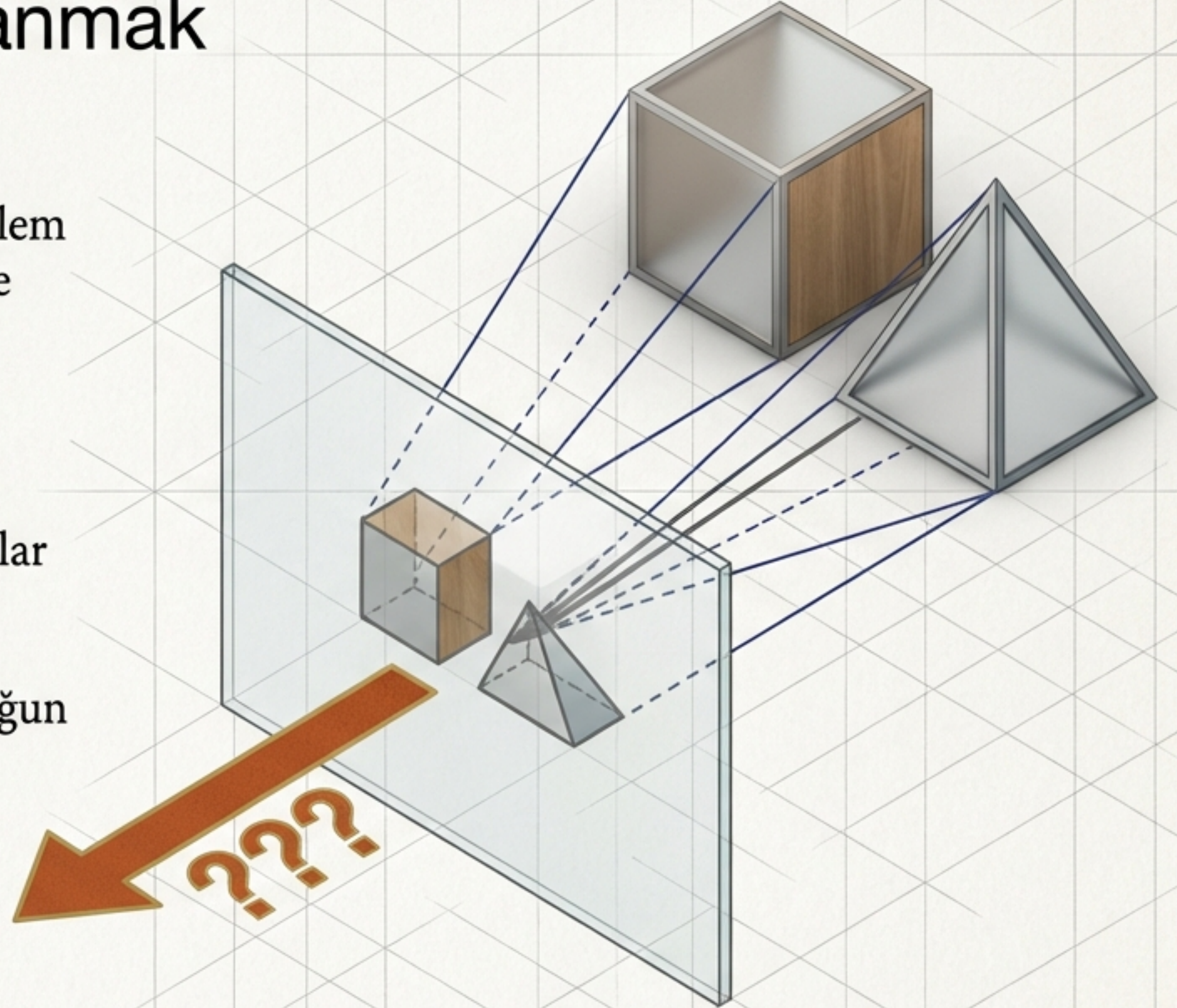
Hafta 3: Geometri, Dönüşümler ve Bilgisayarlı Görü



İki boyutlu görüntülerin düz dünyasından çıkarak, 3D dünyanın sağlam matematiksel mimarisini inşa etmeye başlıyoruz.

Kayıp Boyutu Geri Kazanmak

- Bilgisayarlı görünün temel problemi: 3D dünyayı 2D bir sensöre yansıtmak ve bu işlem sırasında kaybolan derinlik bilgisini tersine mühendislikle geri kazanmak.
- Öklid geometrisi (açılar, uzunluklar) kameraların dünyayı nasıl gördüğünü modellemek için yetersizdir. Paralel doğrular görüntüde kesişir.
- Çözüm: Kuralların basitleştiği ve sonsuzluğun zarifçe modellendiği yeni bir arena olan Projektif Geometri.



$\mathbb{P}^3$ Arenasına Giriş



Öklid uzayını ($\mathbb{R}^3$) genişleterek 3D Projektif Uzayı ($\mathbb{P}^3$) oluşturuyoruz.

Homojen koordinatlar: Bir noktayı 4-vektör olarak temsil etmek.

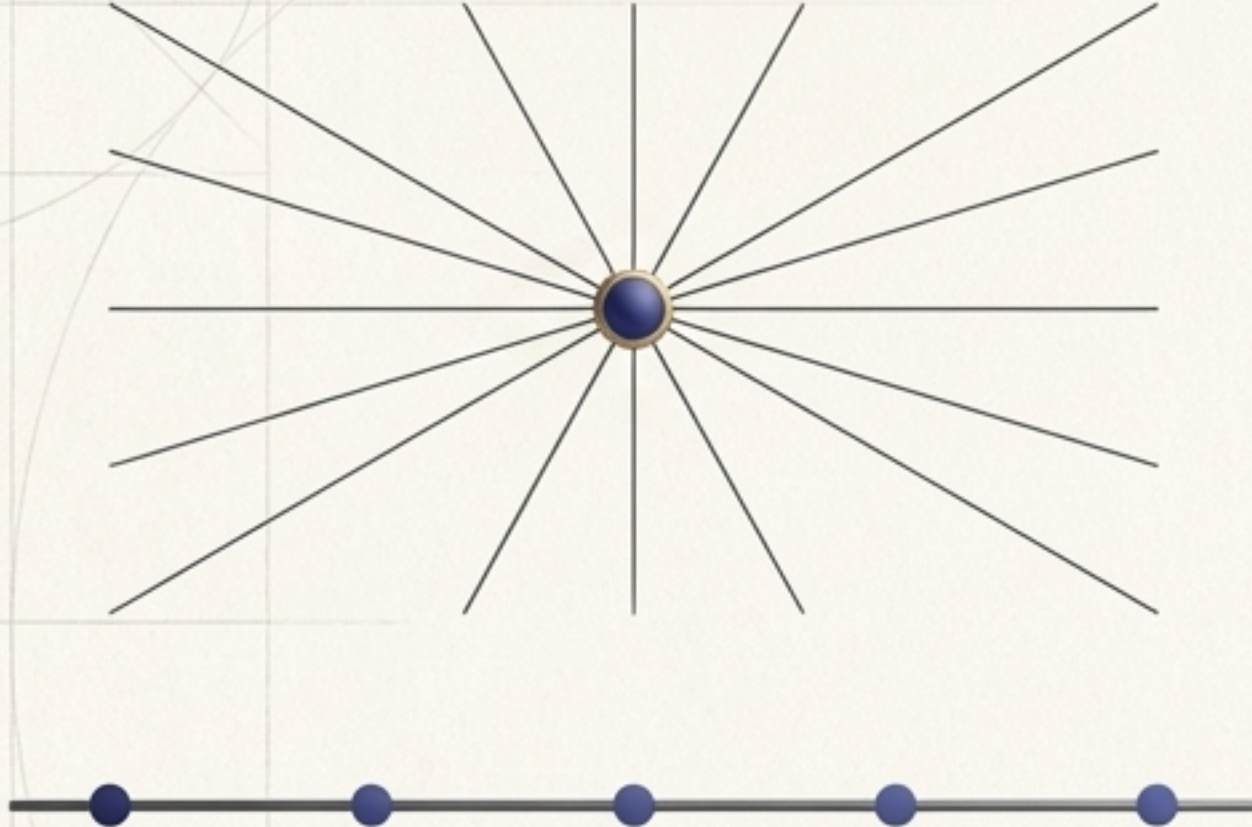
$$X = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$$

Gerçek dünyadaki noktalar: $X_4 \neq 0$ (Genellikle $X_4 = 1$ alınır).

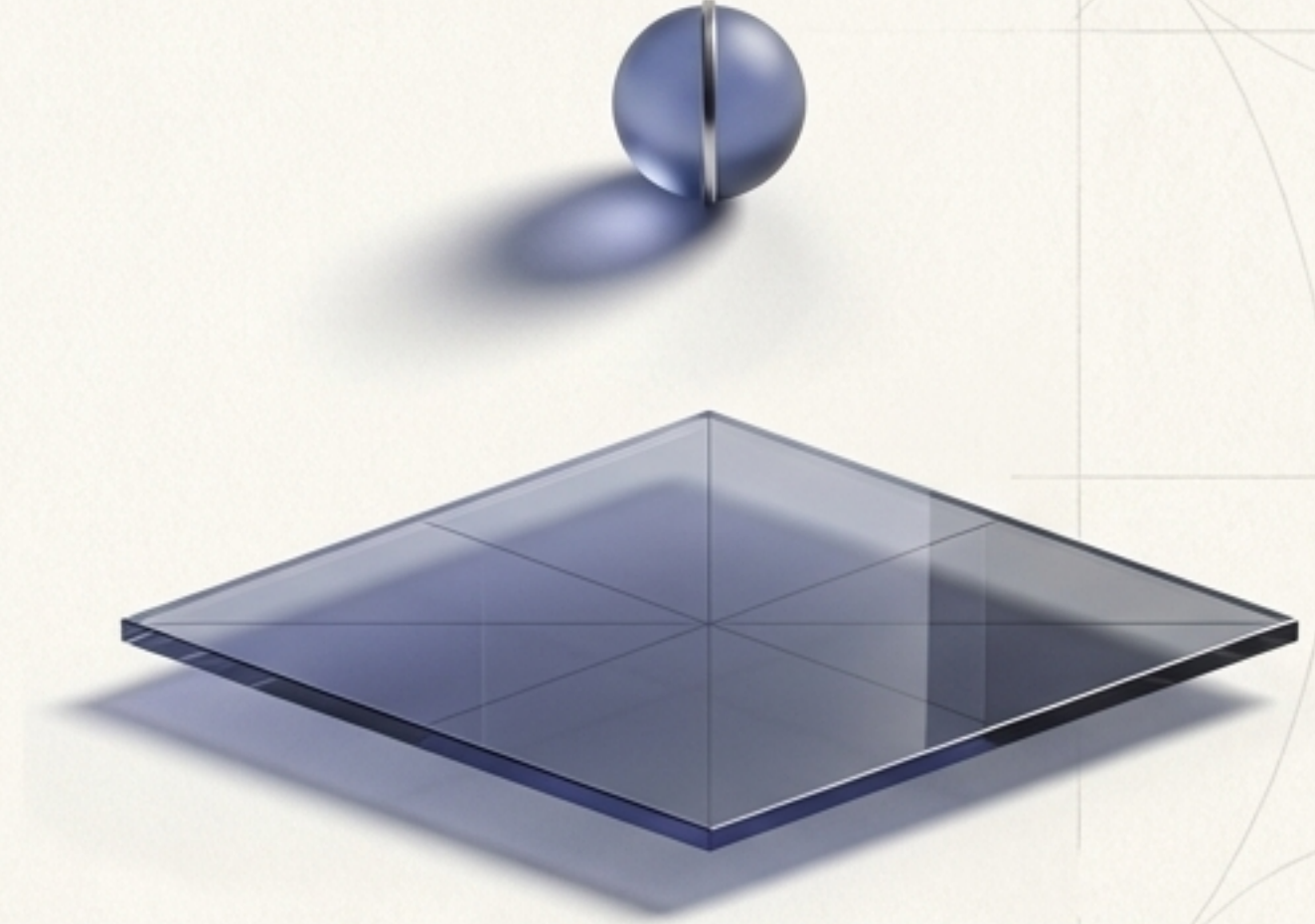
Sonsuzdaki noktalar (İdeal noktalar): $X_4 = 0$. Bu sayede sonsuzluk matematiksel bir istisna olmaktan çıkar, işlenebilir bir veriye dönüşür.

Simetrinin Zarafeti: Noktalar ve Düzlemler

2D Uzay ($\mathbb{P}^2$)



3D Uzay ($\mathbb{P}^3$)



$\mathbb{P}^2$ 'de noktalar ve doğrular **dualdir** (eşleniktir).

Ancak boyut atladığımızda kurallar değişir: $\mathbb{P}^3$ 'te noktalar ve düzlemler **dualdir**.

Bir düzlemin matematiksel temsili: $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)^T$

Kesişim kuralı son derece basittir: Bir X noktası, π düzlemi üzerindeyse $\pi^T X = 0$ denklemini sağlar.

Dualite gereği: 3 nokta bir düzlemi tanımlar, 3 düzlem ise tek bir noktada kesişir.

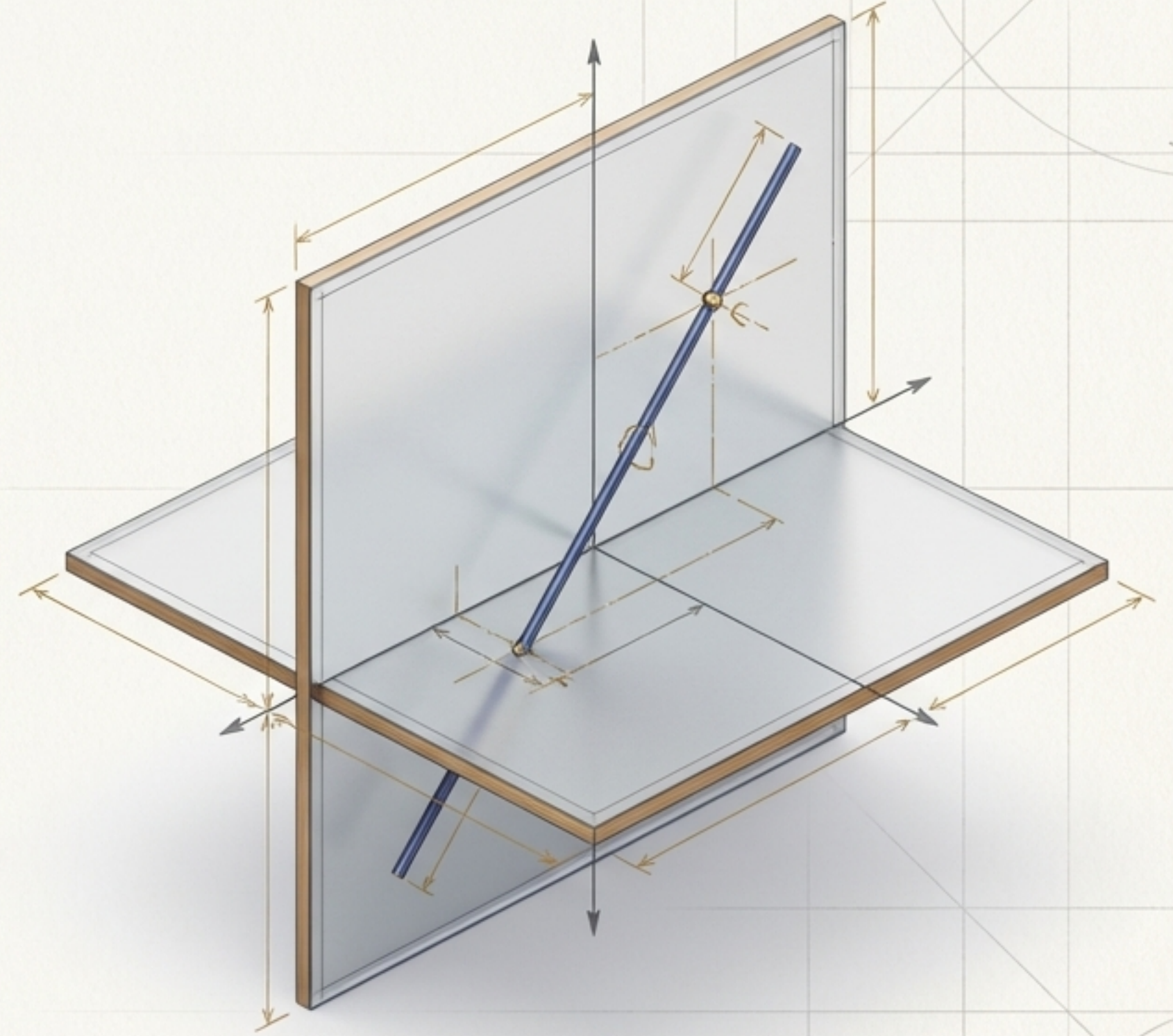
3D Uzayda Doğruların Karmaşıklığı

2D uzayda doğrular basittir (sadece 2 serbestlik derecesi).

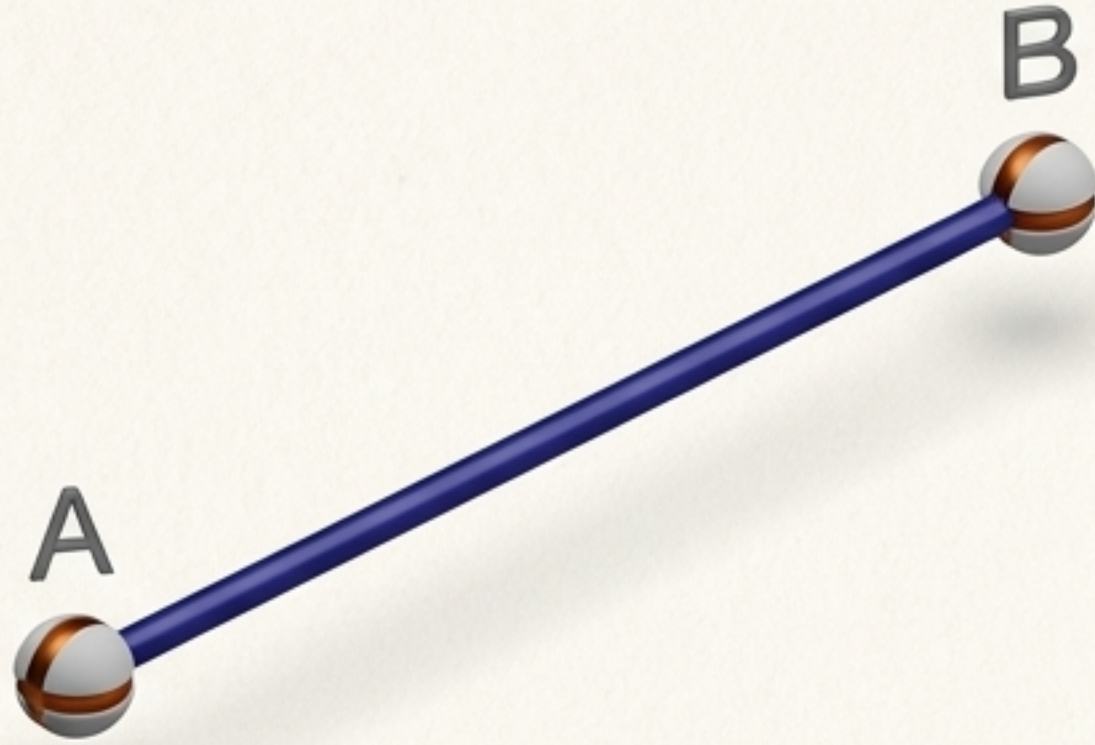
3D uzayda doğrular “uyumsuzdur”. Bir doğrunun 4 serbestlik derecesi vardır.

Daha da ilginç: 3D’de iki doğru her zaman kesişmez (çarpık doğrular).

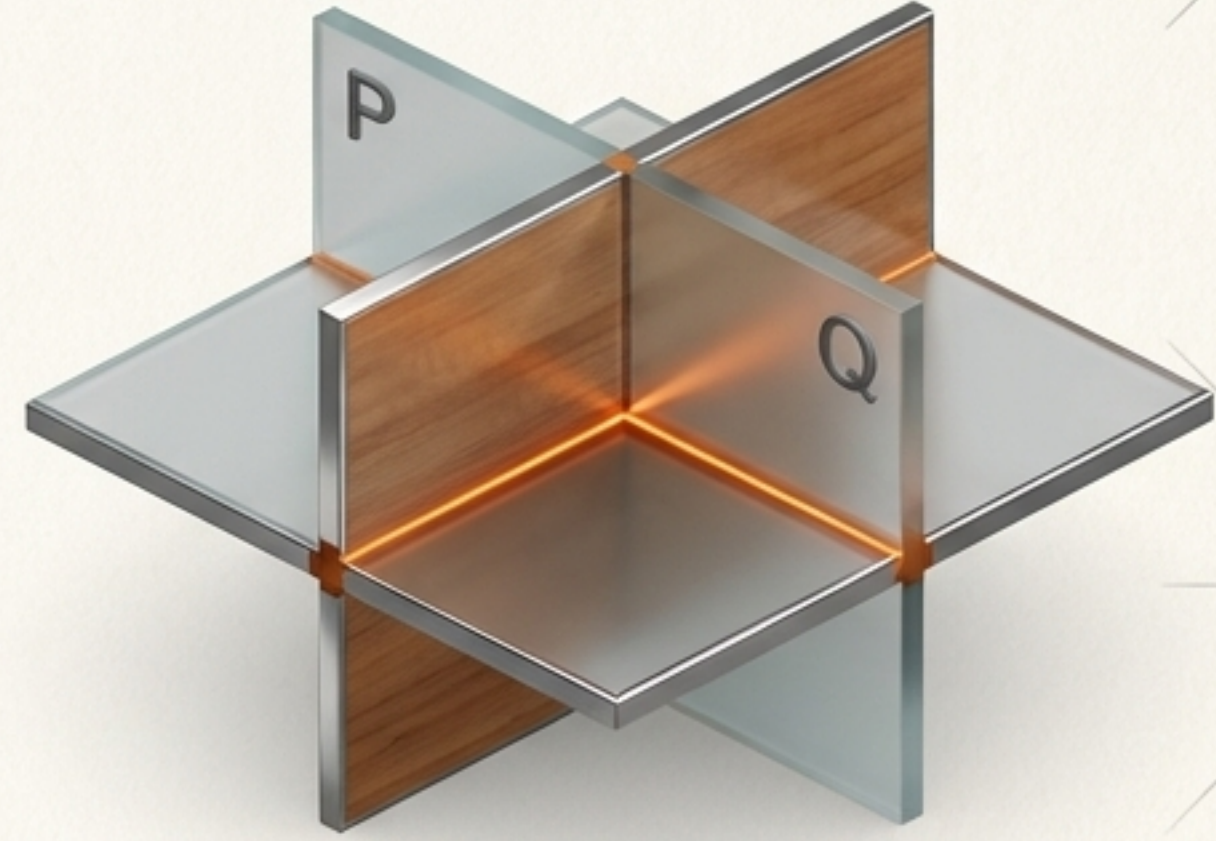
4 serbestlik derecesine sahip bir nesneyi, 4-vektörlerle (noktalar ve düzlemler) çalışan $\mathbb{P}^3$ matematiğine nasıl entegre edeceğiz?



Doğruları Evcilleştirmek: Plücker Matrisleri



$$L = A B^T - B A^T$$



$$L^* = P Q^T - Q P^T$$

Bir doğruyu 4x4 boyutunda, antisimetrik bir matris (L) olarak temsil edebiliriz. Bu matrislerin rankı 2'dir. Bu yapı, doğruyu sistemdeki diğer 4-vektörlerle kusursuz bir şekilde çarpmamıza olanak tanır (Örn: $X = L^* \pi$).

Altıncı Boyuta Geçiş: Plücker Koordinatları

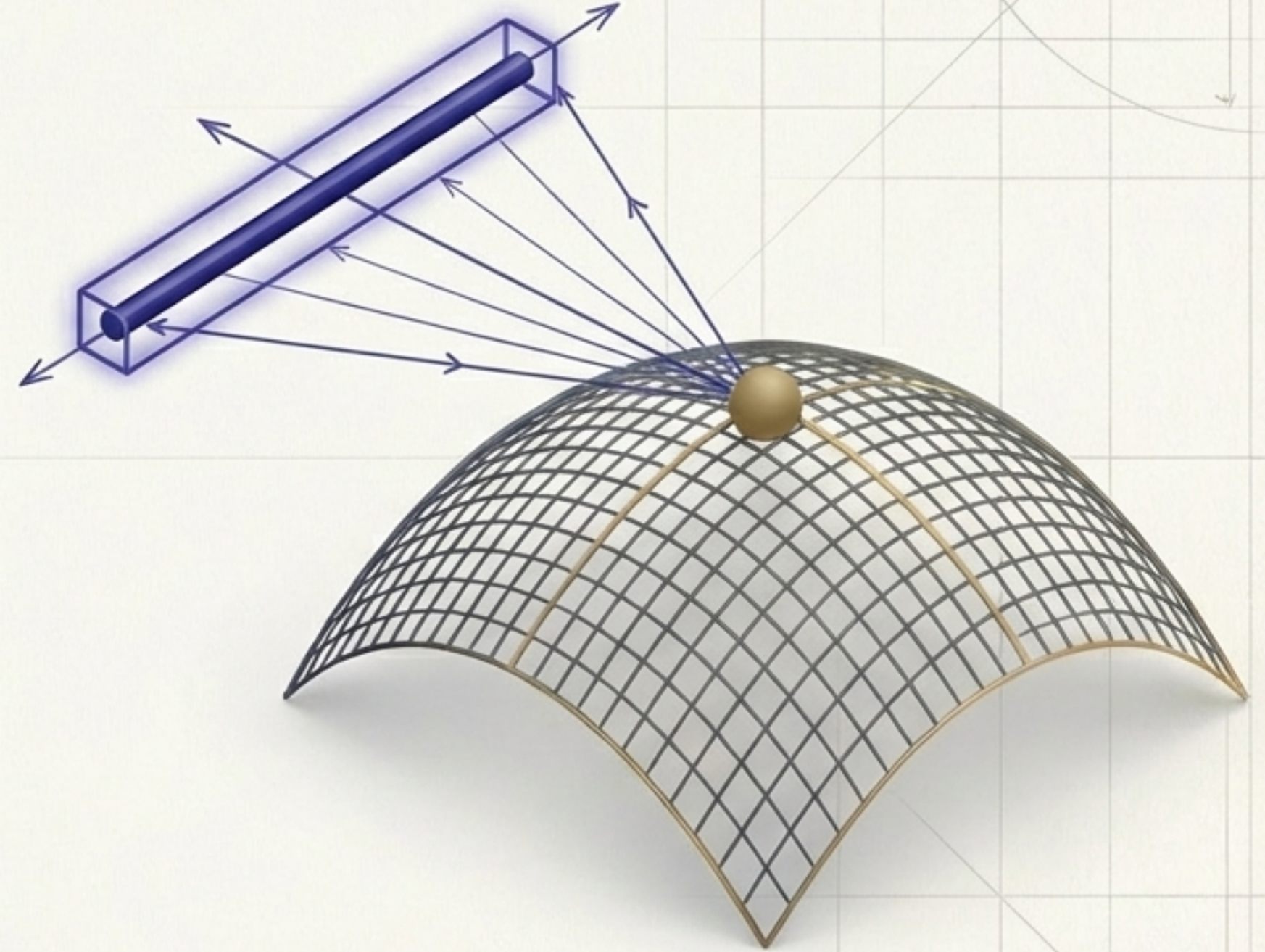
Plücker matrisinin 6 sıfır olmayan elemanını alıp homojen bir 6-vektör oluşturabiliriz:

$$\mathbf{L} = (l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{23}, l_{42}, l_{34})$$

Bir doğrunun 3D uzayda gerçek bir doğru olabilmesi için sihirli bir kuralı sağlaması gerekir: “Klein Quadric” kısıtlaması.

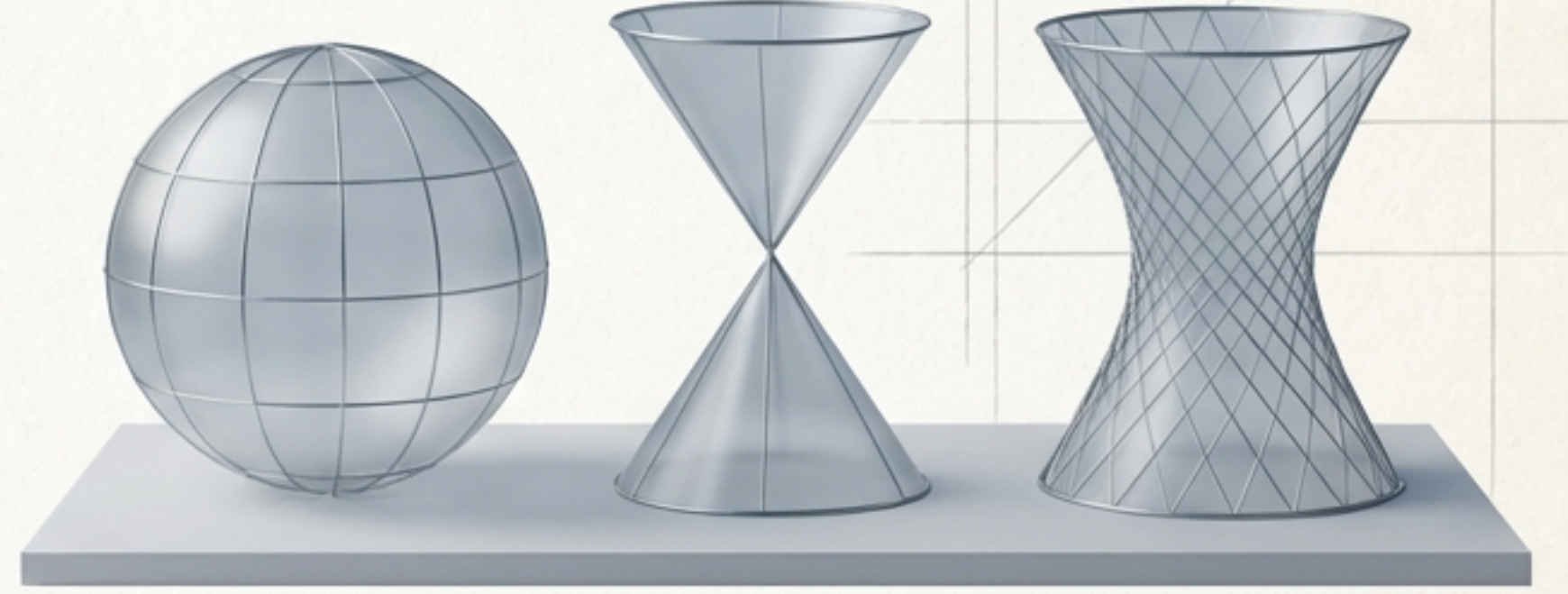
$$l_{12}l_{34} + l_{13}l_{42} + l_{14}l_{23} = 0$$

İki doğrunun ($\mathbf{L}$ ve $\hat{\mathbf{L}}$) kesişip kesişmediğini bulmak, bu koordinatların basit bir skaler çarpımına indirgenir.



Evrene Hacim Kazandırmak: Kuadrikler

Nokta ve düzlemlerden, kavisli yüzeylere geçiş. P^2 'deki koniklerin P^3 'teki karşılığı.



Kuadrik denklemi: $\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} = 0$ (Burada $\mathbf{Q}$, 4x4 simetrik bir matristir).

9 serbestlik derecesine sahiptir; genel konumdaki 9 nokta bir kuadriği tanımlar.

Tıpkı noktalar gibi, dönüşüm matrisleri altında öngörülebilir bir şekilde eğilir ve bükülürler ($\mathbf{Q}' = \mathbf{H}^{-T} \mathbf{Q} \mathbf{H}^{-1}$).

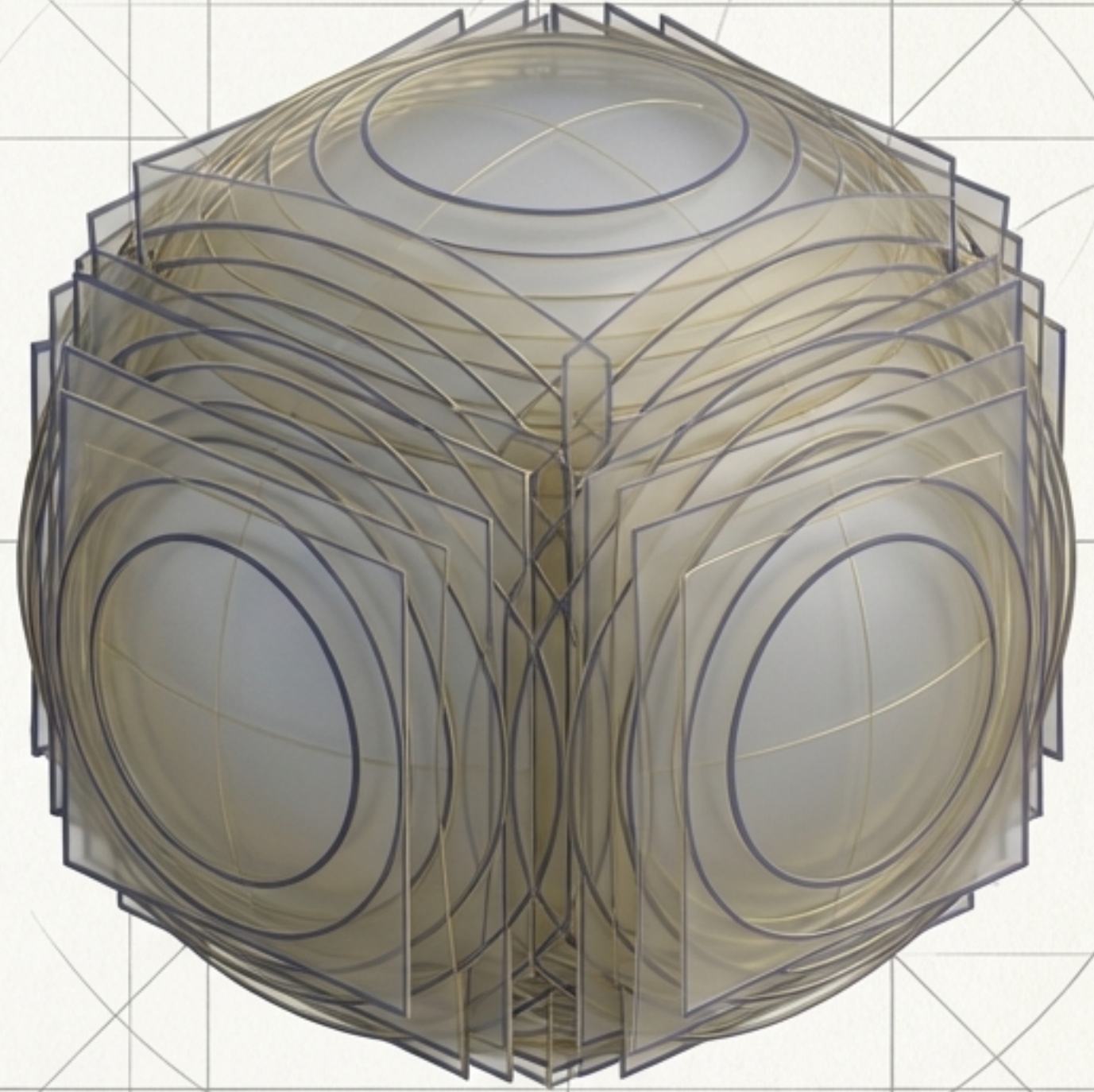
Hacmin Aynası: Dual Kuadrikler

Noktaların düzlemlerle dualite içinde olması gibi, Kuadriklerin de **Dual Kuadrikleri** (Q^*) vardır.

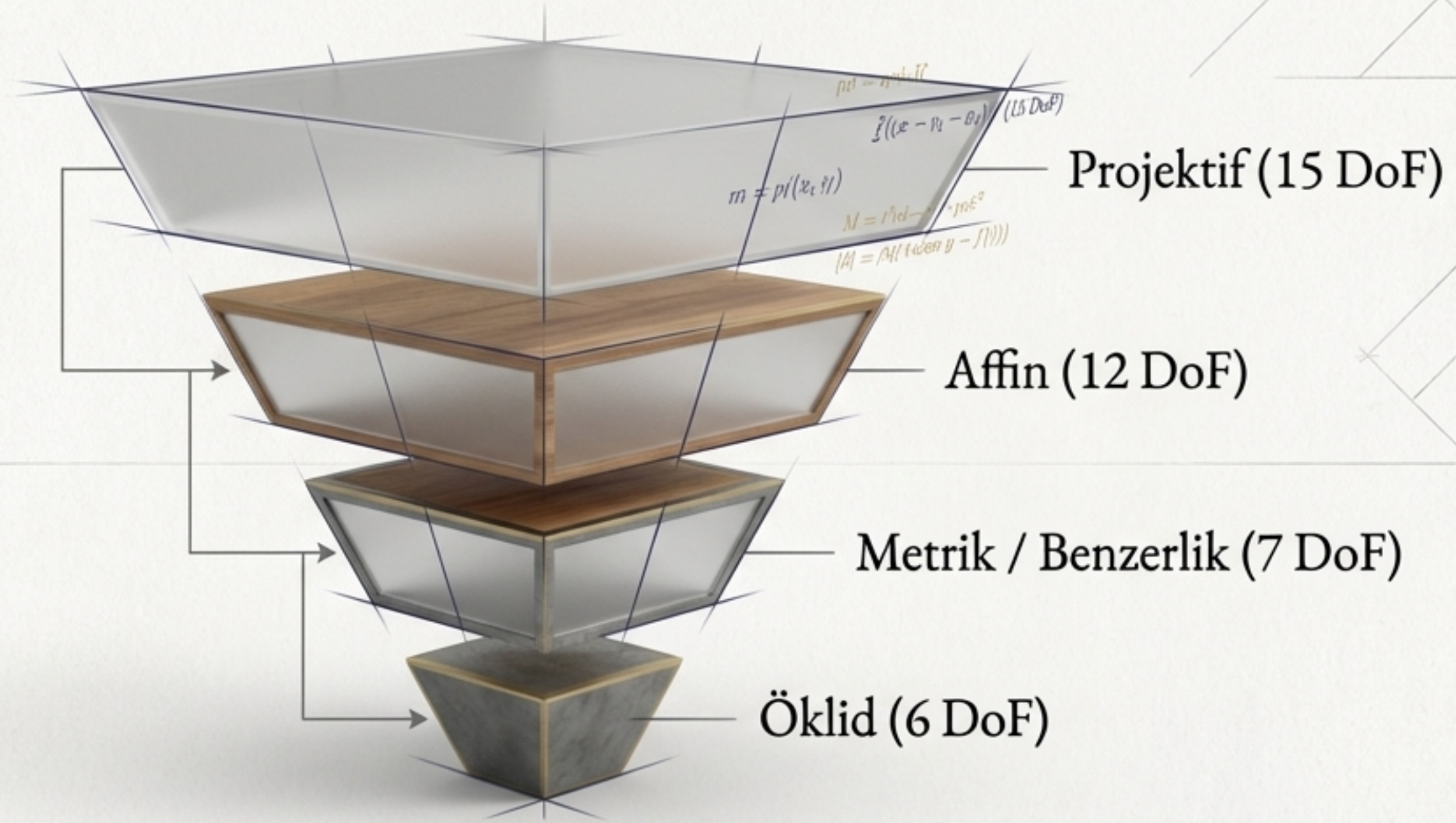
Dual kuadrik, yüzeyi oluşturan noktaların değil, yüzeye teğet olan düzlemlerin kümesidir.

Denklem: $\pi^T Q^* \pi = 0$ (Eğer Q tersinir ise $Q^* = Q^{-1}$).

Bilgisayarlı görüde kameraların nesneleri nasıl algıladığını (kontur jeneratörleri) hesaplamak için bu dual yapı kritik bir rol oynar.



Dönüşüm Hiyerarşisi: Distorsiyonu Geri Almak



Kamera sensörü, gerçek dünyayı en üst katman olan Projektif bir forma hapseder (15 serbestlik derecesi). Amacımız bu hiyerarşide aşağı inerek (serbestlik derecelerini soyarak) Öklid gerçeğine (6 DoF) ulaşmaktır. Bunu başarmak için uzayın içine gizlenmiş, bozulmalara direnen ‘değişmezleri’ (invaryantları) bulmalıyız.

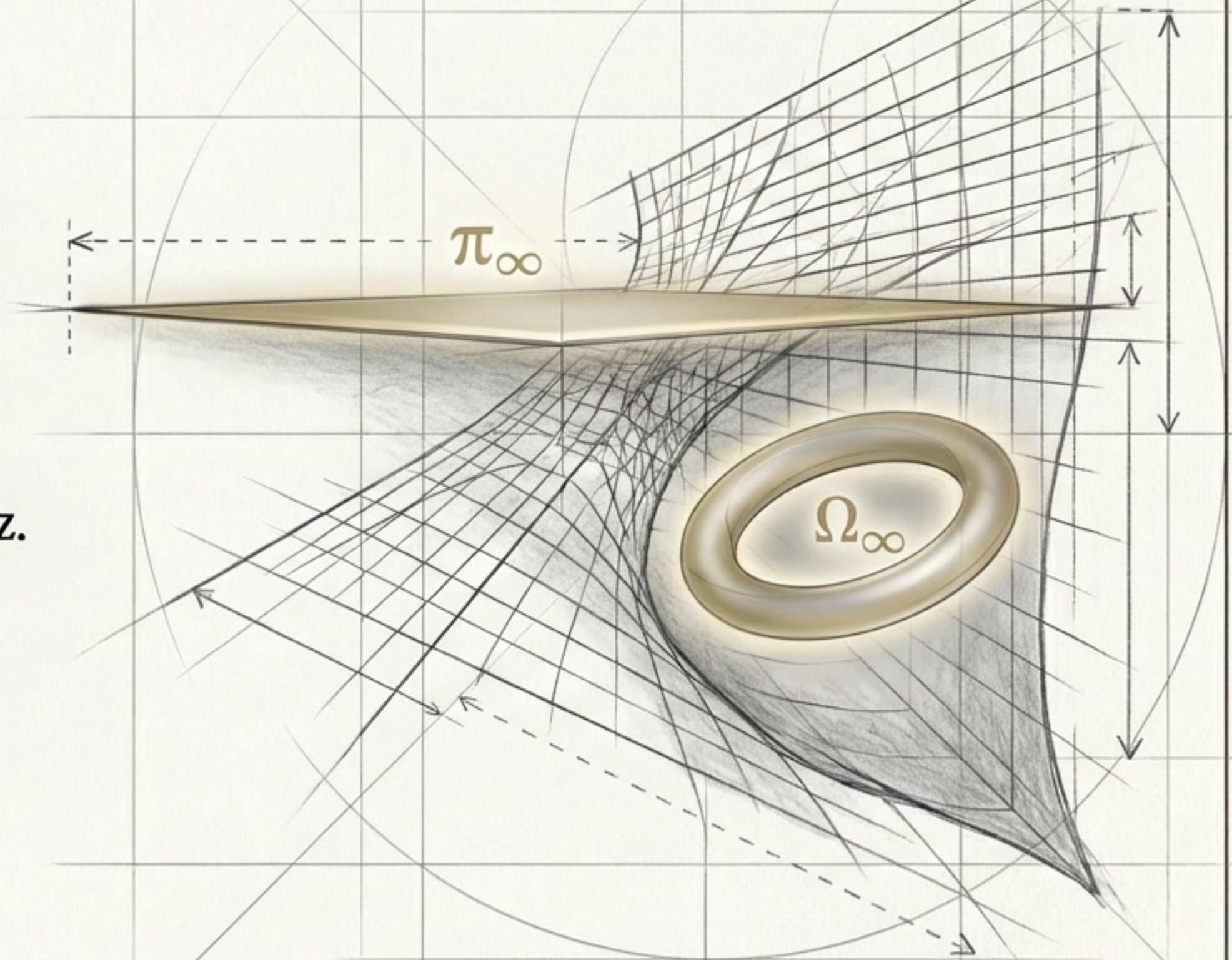
Gerçekliğin Gizli Çapaları

Hiyerarşide aşağı inmek sadece bir cebir problemi değil, bir geometri avıdır.

Eğer projektif uzayda, sonsuzda yer alan referans noktalarını tespit edebilirsek, kameranın yarattığı distorsiyonu silebiliriz.

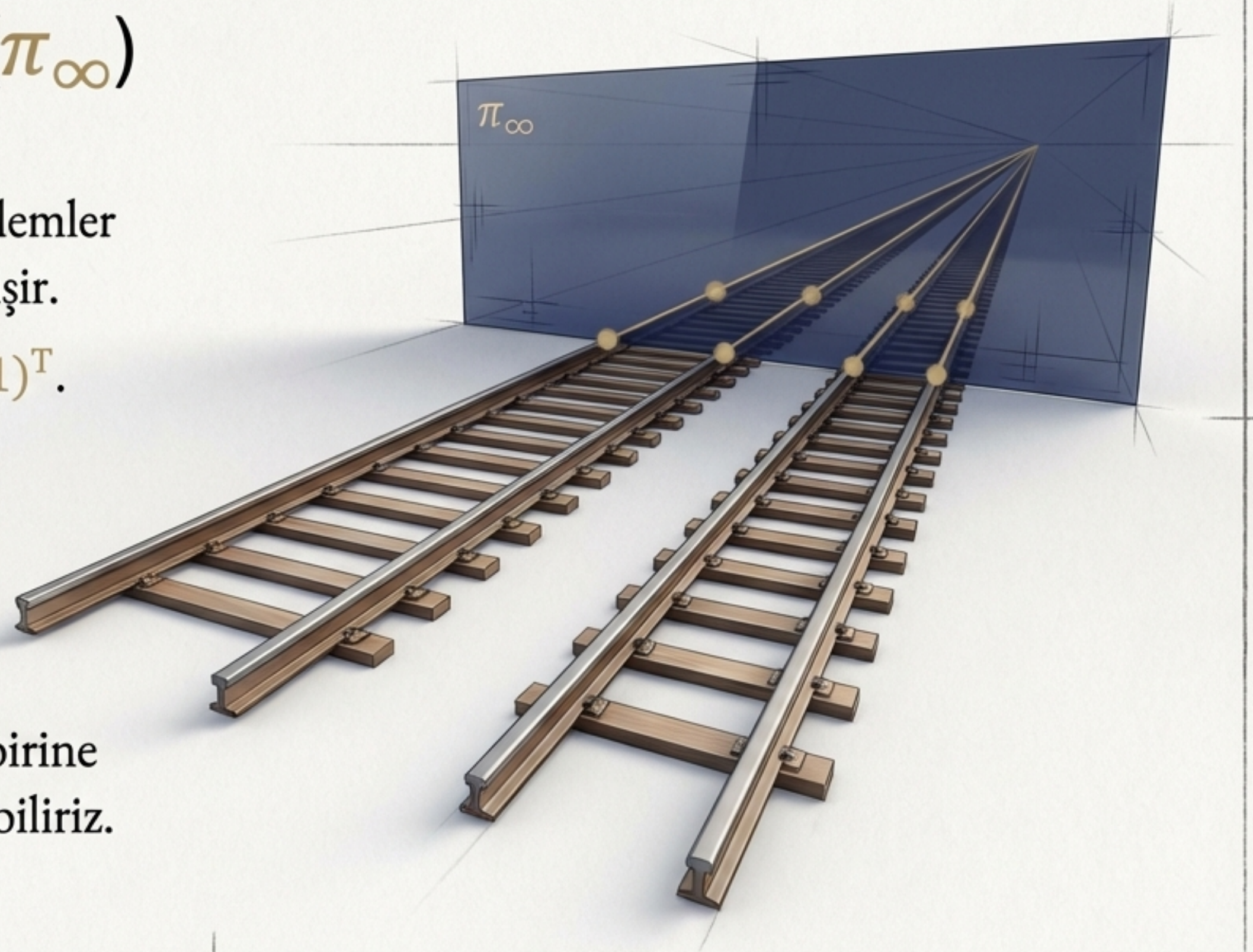
Bizi Affin uzaya taşıyacak çapa: π_{∞}

Bizi Metrik uzaya taşıyacak çapa: Ω_{∞}



Paralelliğin Çapası: Sonsuzdaki Düzlem (π_∞)

- P^3 'teki tüm paralel doğrular ve düzlemler sonsuzdaki bir düzlemde (π_∞) kesişir.
- Kanonik konumu: $\pi_\infty = (0, 0, 0, 1)^T$.
- Kameranın yansıttığı bozulmuş görüntüde π_∞ 'yi bulduğumuz an, Projektif uzaydan Affin uzaya “terfi” ederiz.
- Sonuç: Artık hangi nesnelerin birbirine paralel olduğunu kesin olarak bilebiliriz.



Açıların Çapısı: Mutlak Konik (Ω_∞)

Sonsuzdaki düzlemin üzerine çizilmiş, tamamen sanal (reel noktası olmayan) sihirli bir eğri.

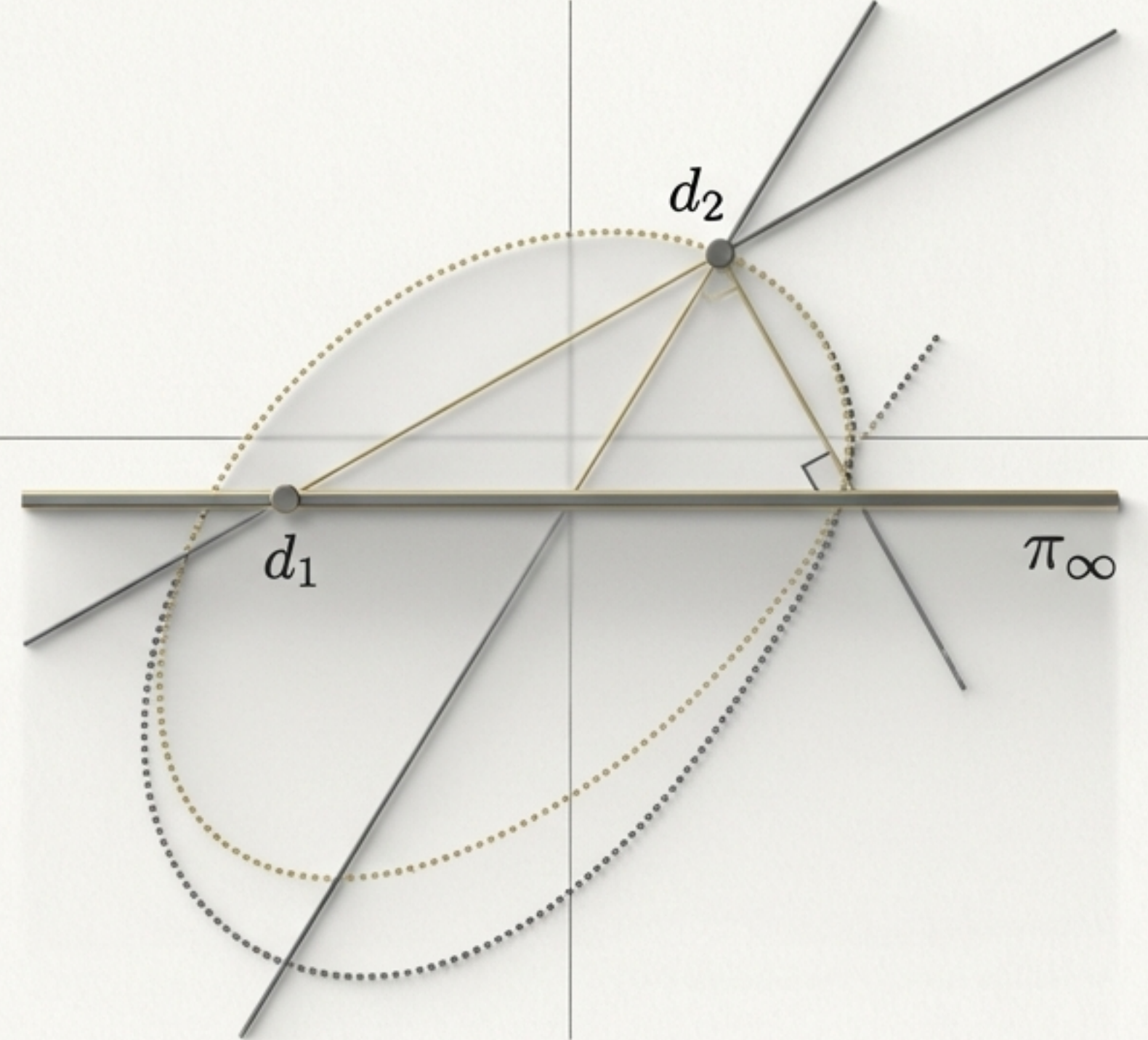
Matematiksel tanımı:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0 \text{ ve } X_4 = 0.$$

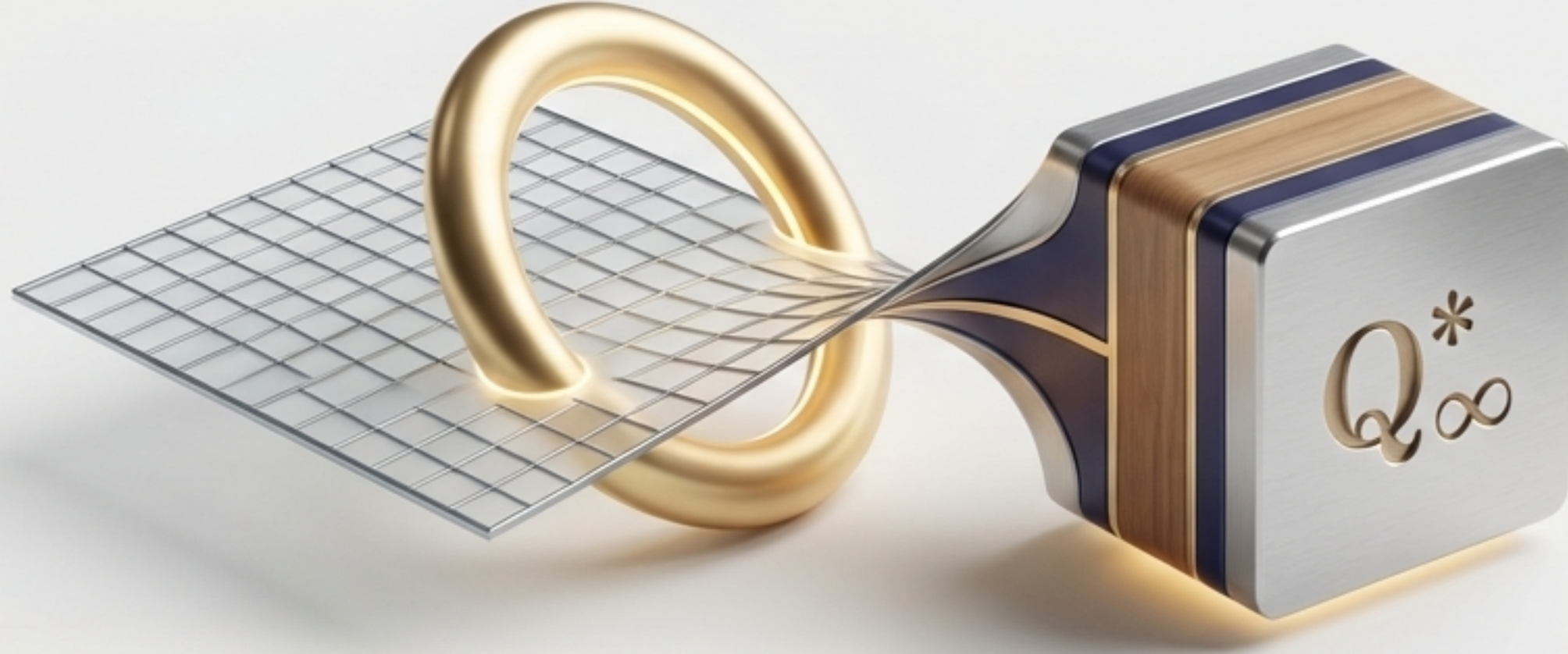
Süper gücü: Açıları ve dikliği (ortogonallığı) tanımlar.

Eğer iki yön (d_1, d_2), Ω_∞ 'a göre “eşlenik” (conjugate) ise, gerçek dünyada birbirlerine diktir. ($d_1^T \Omega_\infty d_2 = 0$)

Ω_∞ 'yi bulmak, **Metrik uzayın** (gerçek dünya oranları ve açıları) kilidini açar.



Çapaları Birleştirmek: Mutlak Dual Kuadrik (Q_{∞}^*)



Pratikte iki ayrı nesneyle (π_{∞} ve Ω_{∞}) uğraşmak zordur.

Çözüm: İkisini de tek bir yapıda kodlayan Mutlak Dual Kuadrik (Q_{∞}^*).

Geometrik olarak, Ω_{∞} 'ye teğet olan düzlemlerden oluşur (bir “kenar” kuadriği).

Rankı 3 olan 4x4 bir matristir. Boş uzayı (null-space) bize doğrudan π_{∞} 'yi verir.

Sadece Benzerlik (Similarity) dönüşümleri altında sabit kalır. Otomatik kamera kalibrasyonunun kalbidir.

Bilgisayarlı Görünün Kalbine Dönüş

Tüm bu soyut matematik kamerada nasıl somutlaşır?

Mutlak Konik'in (Ω_∞) kameradaki izdüşümü, kameranın iç parametre matrisi olan $\mathbf{K}$ 'ya doğrudan bağlıdır!

$$\omega = (\mathbf{K} \mathbf{K}^T)^{-1}$$

Eğer bir görüntüde bu izdüşümü (ω) bulabilirsek, kameranın nasıl bir lense sahip olduğunu ($\mathbf{K}$) tamamen tersine mühendislikle çözebiliriz (Oto-kalibrasyon).

$\mathbb{P}^3$ matematiği bir teori değil, çevremizi algılayan tüm otonom sistemlerin motorudur.

